

УДК 533. 92

КОАЛЕСЦЕНЦИЯ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Жуховицкий Д. И.

Рассмотрена коалесценция капель жидкости в турбулентном газовом потоке, происходящая под воздействием пульсаций температуры (турбулентная коалесценция). Капли испытывают случайные блуждания в пространстве размеров. Найдены автомоделльные решения уравнения Фоккера — Планка, описывающего этот процесс. Основной тенденцией являются падение концентрации капель и увеличение их среднего размера. Показано, что интенсивность турбулентной коалесценции может значительно превосходить интенсивность коалесценции, обусловленной зависимостью скорости роста капли от ее радиуса.

1. В тех случаях, когда двухфазный турбулентный поток реализуется в условиях интенсивного теплообмена, существенное влияние на эволюцию спектра размеров капель могут оказывать пульсации температуры. В настоящее время этот вопрос изучен недостаточно.

Одним из процессов, происходящих в системе, где образования новых зародышей жидкой фазы не происходит, является коалесценция [1, 2], т. е. рост более крупных конденсированных частиц за счет уменьшения мелких. В соответствии с [1, 2] коалесценция происходит в результате того, что давление насыщенного пара, находящегося в равновесии с каплей, зависит от кривизны ее поверхности. В данной работе исследован другой механизм коалесценции, связанный с резкой зависимостью давления насыщения от температуры.

В неизотермическом турбулентном потоке благодаря интенсивному теплообмену температура газа вблизи капель испытывает случайные пульсации. Если локальная температура оказывается выше средней, капля испаряется, если ниже — растёт. Таким образом, радиусы капель постоянно испытывают малые случайные приращения. Такое движение капель в пространстве размеров напоминает броуновскую диффузию. При этом в пространстве размеров нуль является особой точкой: попадая туда, капля исчезает. Это однозначно обуславливает направленность процесса. Если, аналогично [1, 2], предположить, что полная масса капель постоянна, концентрация капель должна падать, а их средний размер возрастать. Коалесценцию, вызванную случайными пульсациями температуры, будем называть турбулентной коалесценцией. Целью исследования является нахождение функции распределения капель по размерам, формирующегося в этом процессе, и степени пересыщения пара.

2. Уравнение Фоккера — Планка. Рассмотрим систему, образованную каплями жидкости, их паром и буферным газом, реализованную в виде турбулентного течения. При этом не будем учитывать влияния конденсированной фазы на характеристики турбулентности и будем считать их заданными. Предположим также, что давление пара близко к давлению насыщения. Покажем, что в этих условиях эволюция функции распределения капель по размерам описывается уравнением Фоккера — Планка.

Кинетика роста (испарения) капли определяется выражением для скорости изменения ее радиуса dR/dt , которое запишем в свободно-молекулярном приближении [3]

$$dR/dt = (n_v v(T) - n_s^*(R, T_d) v(T_d)) / 4n_i, \quad (1)$$

где n_v и n_i — концентрации молекул в паре и в жидкости; $n_s^*(R, T_d) = (p_0/kT_d) \exp[(2\sigma/n_i R - kq)/kT_d]$ — концентрация молекул в паре, находя-

щемся в равновесии с каплей радиуса R и температуры T_d ; p_0 — величина, слабо зависящая от температуры; σ — коэффициент поверхностного натяжения; q — теплота испарения одной молекулы (в К); k — постоянная Больцмана; $v(T) = \sqrt{8kT/\pi m}$ — тепловая скорость; T — температура газа в той точке, где находится частица (локальная температура); m — масса молекулы.

Упростим выражение (1). Заметим прежде всего, что n_v может изменяться как в результате конденсации пара и испарения частиц, так и вследствие турбулентной диффузии. Первый процесс вызывает появление пространственной неоднородности концентрации пара n_v — она стремится к концентрации насыщенного пара, соответствующей температуре в данной точке. Второй процесс приводит к выравниванию концентрации пара во всем пространстве. Эти процессы можно охарактеризовать временами τ_v и τ_0 соответственно (см. п. 4). Очевидно, что если $\tau_v \gg \tau_0$, n_v можно считать величиной, меняющейся на временах, значительно больших τ_0 и не зависящей от положения в пространстве¹.

Рассмотрим теперь концентрацию $n_s^*(R, T_d)$. Пульсации локальной температуры газа T вызывают пульсации T_d , а следовательно, и n_s^* . Выражение для разности $T - T_d$ при $q|T - T_d|/T^2 \ll 1$ имеет вид [5]

$$T - T_d = (1 - n_v/n_s^*(R, T)) / (q/T^2 + n_g k_a c_v / k q n_s^*(R, T)), \quad (2)$$

где n_g — концентрация молекул буферного газа; c_v — теплоемкость на одну его молекулу; k_a — коэффициент аккомодации. Уравнение (2) выведено в предположении о том, что выделяющаяся (поглощаемая) теплота испарения переносится молекулами буферного газа.

Как показано в п. 3, $n_v \rightarrow n_s^*(\infty, T_0)$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда, записывая $T = T_0 + T'$, $T_d = T_{d0} + T_d'$, где T_0 и T_{d0} — осредненные температуры, T' , T_d' — пульсационные составляющие, перепишем (2) в виде

$$T - T_d = T' / (1 + n_g k_a c_v T_0^2 / k q^2 n_s^*(\infty, T_0)). \quad (3)$$

Осредняя (3), получим $T_{d0} = T_0$ и, следовательно,

$$T_d' = \gamma T', \quad \gamma = 1 - 1 / (1 + n_g k_a c_v T_0^2 / k q^2 n_s^*(\infty, T_0)). \quad (4)$$

Из (4) видно, что пульсации T_d имеют меньший размах, чем пульсации T , однако при $k_a n_g c_v T_0^2 / k q^2 n_s^* \gg 1$ их различие не существенно.

Рассмотрим зависимость n_s^* от R . Ею, как известно, можно пренебречь, если радиус капли существенно превышает критический [3]

$$R \gg R^* = 2\sigma / n_s k T |\ln(n_v/n_s^*)|. \quad (5)$$

Порядок R^* определяется величиной T' . Поэтому (5) можно переписать в виде

$$R \gg 2\sigma T_0 / n_s k q \gamma T_1, \quad (6)$$

где $T_1 = \sqrt{\langle T'^2 \rangle}$ (угловые скобки означают осреднение).

Считая (6) выполненным и полагая n_s^* равным $n_s(T)$ — концентрации молекул насыщенного пара над плоской поверхностью, перепишем (1)

$$dR/dt = [\Delta n_v(t) - n_s(T_0) q \gamma T'(t) / T_0^2] v(T_0) / 4n_s, \quad (7)$$

где $\Delta n_v = n_v - n_s(T_0)$. В правой части (7) $\Delta n_v(t)$ является медленно меняющейся функцией времени, а $T'(t)$ — случайной функцией. Таким образом, (7) формально совпадает с уравнением движения броуновской частицы [6], причем первый член в квадратных скобках соответствует упорядоченному движению капли в пространстве размеров, а второй — случайным блужданиям. Следовательно, плотность вероятности нахождения капли в данной точке пространства размеров или пропорциональная ей функция распределения капель по радиусам $f(R, t)$ удовлетворяет урав-

¹ Обратный предельный случай рассмотрен в работе [4], из результатов которой следует, что в такой ситуации пульсации температуры не оказывают существенного влияния на функцию распределения.

нению Фоккера – Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} - V \frac{\partial f}{\partial R}, \quad (8)$$

где D – коэффициент диффузии; V – скорость упорядоченного движения. Согласно определению [6], $V = \lim_{\tau \rightarrow 0} (\tau^{-1} \langle R(t+\tau) - R(t) \rangle)$,

$2D = \lim_{\tau \rightarrow 0} [\tau^{-1} \langle (R(t+\tau) - R(t))^2 \rangle]$. Интегрируя (7), найдем

$$R(t) - R(0) = (v/4n_i) \int_0^t \Delta n_v(\theta) d\theta - (\gamma n_s v q / 4n_i T_0^2) \int_0^t T'(\theta) d\theta, \quad (9)$$

что после осреднения дает $V = v \Delta n_v / 4n_i$, $2D = \lim_{\tau \rightarrow 0} [(\gamma^2 n_s^2 v^2 q^2 / 16n_i^2 T_0^4)$

$\tau^{-1} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \Lambda(|\theta'' - \theta'|) d\theta' d\theta'']$, где $\Lambda(\theta) = \langle T'(0) T'(\theta) \rangle$ – временная корреляционная функция пульсаций температуры. Поскольку в коррелятор $\Lambda(\theta)$ входят локальные значения температуры в точках нахождения капель, которые частично увлекаются турбулентными пульсациями, он, вообще говоря, не совпадает с лагранжовой временной корреляционной функцией. Вид $\Lambda(\theta)$ таким образом определяется конкретной моделью турбулентности. Однако основные параметры, характеризующие $\Lambda(\theta)$, можно оценить по порядку величины, не прибегая к детальным расчетам (см. п. 4).

Произведя повторное интегрирование в области $t \leq \theta' \leq \theta'' \leq t + \tau$ с учетом $\tau \gg \tau_r$, окончательно найдем

$$D = \tau_r (dq \gamma T_1 / 3 \tau_i T_0^2)^2, \quad (10)$$

где $\tau_r = \int_0^\infty \Lambda(\theta) d\theta / \Lambda(0)$, $d = (3/4\pi n_i)^{1/3}$ – радиус молекулярной ячейки в

жидкости, $\tau_i = (\pi d^2 n_s v)^{-1}$, $T_1 = \sqrt{\Lambda(0)}$. Вывод (10) аналогичен выводу выражения для коэффициента турбулентной диффузии в обычном пространстве [7]. Уравнение (8) следует дополнить граничным условием $f(0, t) = 0$ и уравнением массового баланса

$$(4\pi/3) n_i \int_0^\infty R^3 f(R, t) dR = n_0, \quad (11)$$

где n_0 – количество молекул в единице объема, находящееся в жидкой фазе, которое считаем постоянным в силу $n_v \rightarrow n_s(T_0)$.

Условие (11) дает однозначную связь между $V(t)$ и $f(R, t)$. Действительно, умножая обе части (8) на R^3 и интегрируя по R , получим после преобразований

$$V(t) = -2D \int_0^\infty R f(R, t) dR / \int_0^\infty R^2 f(R, t) dR. \quad (12)$$

Это означает, что в ходе процесса турбулентной коалесценции пар в среднем остается ненасыщенным, $n_v < n_s(T_0)$. Заметим, что условие $\gamma q T_1 / T_0^2 \ll 1$ позволяет определить среднее пересыщение по средней температуре T_0 .

Поясним качественно причину ненасыщенности пара. В процессе турбулентной коалесценции, как и при обычной коалесценции, крупные капли в основном растут, а более мелкие испаряются. Для выполнения условия (11) необходимо, чтобы увеличение радиуса крупных капель было меньше, чем уменьшение радиуса мелких. Поскольку правая часть уравнения роста (7) не зависит от R , все капли, испытывая случайные

блуждания, должны совершать также и упорядоченное движение в сторону меньших размеров. При этом скорость испарения мелких капель увеличивается, а скорость роста больших замедляется, что и обеспечивает выполнение (11).

3. Автомоделное решение. Будем искать автомоделное решение (8) в виде $f(u, t) = \alpha(t)P(u)$, где $P(u)$ — функция автомоделной переменной $u = R\beta(t)$, α и β — функции времени. Для того, чтобы левая часть (11) не зависела от времени, необходимо, чтобы $\alpha(t) = A\beta^4(t)$, где A — константа, т. е.

$$f(u, t) = A\beta^4(t)P(u). \quad (13)$$

Подставляя (13) в (8) и учитывая (12), получим после разделения переменных

$$\frac{1}{D\beta^3} \frac{d\beta}{dt} = \left(\frac{d^2P}{du^2} + \omega_0 \frac{dP}{du} \right) / \left(4P + u \frac{dP}{du} \right) = -\lambda, \quad (14)$$

где $\omega_0 = 2 \int_0^\infty uP(u) du / \int_0^\infty u^2P(u) du$; λ — постоянная разделения. Из (14) следует

$$d\beta/dt + \lambda D\beta^3 = 0, \quad (15a)$$

$$d^2P/du^2 + (\omega_0 + \lambda u) dP/du + 4\lambda P = 0. \quad (15b)$$

Уравнение (15a) позволяет найти асимптотический вид $\beta(t)$

$$\beta(t) = 1/\sqrt{2\lambda Dt}. \quad (16)$$

Уравнение (15b) заменой переменных $P = P'(0)\lambda^{-1/2}e^{-x^2/4}\zeta(x)$, $x = \lambda^{1/2}u + \varepsilon_0$ сводится к следующему:

$$\zeta'' + (1/2 - x^2/4)\zeta = 0, \quad \zeta(\varepsilon_0) = 0, \quad \zeta'(\varepsilon_0) = e^{\varepsilon_0^2/4}, \quad (17)$$

где $\varepsilon_0 = \omega_0\lambda^{-1/2}$ — константа, подлежащая определению. Уравнение (17) совпадает с уравнением Шредингера для волновой функции одномерного гармонического осциллятора, находящегося на третьем энергетическом уровне. Его решение, как известно $\zeta(x) = Ce^{-x^2/4}H_3(x/\sqrt{2})$, где C — нормировочная константа, $H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$ — полином Эрмита 3-го порядка. Единственный положительный корень $H_3(\xi)$ есть $\xi_0 = \sqrt{3}/2$, поэтому, как следует из первого граничного условия (17), $\varepsilon_0 = \sqrt{3}$. Определяя C из второго граничного условия и вводя $Z(x) = \zeta(x + \sqrt{3}) \exp[-(x + \sqrt{3})^2/4]$, получим

$$Z(x) = (e^{3/8}/6) (x^3 + 3\sqrt{3}x^2 + 6x) \exp[-(x + \sqrt{3})^2/2]. \quad (18)$$

Функция $Z(x)$, определяющая форму искомой функции распределения по радиусам, показана на рис. 1. Видно, что распределение капель по радиусам оказывается достаточно широким — его ширина порядка среднего радиуса.

Запишем теперь $f(R, t)$ в явном виде. Определяя в (13) $P(u)$ через $Z(x)$, найдем

$$f(R, t) = (AP'(0)/\lambda^{3/2}) (2Dt)^{-2} Z(R/\sqrt{2Dt}), \quad (19)$$

где использовано решение (16). Нормировочный множитель определим, подставляя (19) в (11). Окончательно получим

$$f(R, t) = (3/16\pi I(3)) (n_0/n_1) (Dt)^{-2} Z(R/\sqrt{2Dt}), \quad (20)$$

где

$$I(m) = \int_0^\infty x^m Z(x) dx.$$

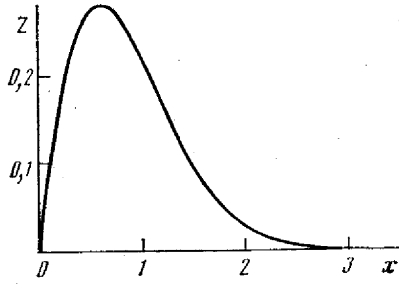


Рис. 1. Функция распределения капель по размерам (автомодельные переменные)

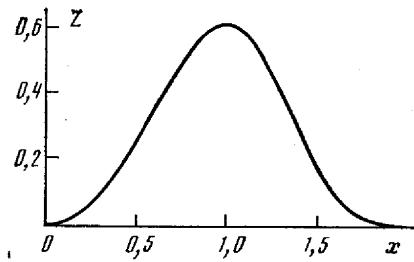


Рис. 2. Функция распределения капель по размерам в диффузионном режиме роста

Распределение (20) дает решение поставленной задачи. Оно не содержит никакой информации о начальной функции распределения, что является следствием стохастичности процесса. Уравнение (20) позволяет определить концентрацию капель

$$n_d(t) = \int_0^{\infty} f(R, t) dR = (3I(0)/8\sqrt{2}\pi I(3)) (n_0/n_1) (Dt)^{-3/2} \quad (21)$$

и их средний радиус

$$\bar{R}(t) = \int_0^{\infty} Rf(R, t) dR / \int_0^{\infty} f(R, t) dR = (I(1)/I(0)) \sqrt{2Dt}. \quad (22)$$

С помощью (8), (20) и (12) найдем $I(0) = 1/3$, $I(1) = \sqrt{3}/6$. Вычисление дает $I(3) \approx 0,468$. Таким образом, $n_d(t) \approx 0,0601 (n_0/n_1) (Dt)^{-3/2}$, $\bar{R}(t) = 1,23 (Dt)^{1/2}$. Наиболее вероятное значение радиуса, соответствующее максимуму $Z(x)$ при $x = 0,602$, $R = 0,851 (Dt)^{1/2}$.

Из полученных зависимостей прямо следует, что в результате турбулентной коалесценции концентрация капель падает, а их средний размер возрастает. Временные зависимости этих величин оказываются такими же, как и при обычной коалесценции в свободно-молекулярном режиме роста капель [5]. Однако если амплитуда пульсаций T_1 достаточно велика, интенсивность турбулентной коалесценции может быть выше (см. п. 4).

Подставляя (20) в (12), найдем

$$V(t) = -(3D/2t)^{1/2}. \quad (23)$$

Среднее пересыщение пара $n_v/n_s(T_0) = 1 - (q\gamma T_1/T_0^2) (3\tau_r/2t)^{1/2}$. При $t \rightarrow \infty$ $n_v/n_s(T_0) \rightarrow 1$. Заметим, что медленно меняющаяся компонента давления пара $\Delta n_v = (4n_e/v) V(t)$ много меньше амплитуды пульсаций $n_s(T_d)$ $\Delta n_s = n_s(T_0) q\gamma T_1/T_0^2$

$$|\Delta n_v|/\Delta n_s = (3\tau_r/2t)^{1/2} \ll 1. \quad (24)$$

4. Обсуждение. Выше было показано, что диффузия капель в пространстве размеров, происходящая под воздействием турбулентных пульсаций температуры, приводит к возникновению характерного распределения по размерам, не зависящего от начального. Рассмотрим вопрос о границах применимости теории. Очевидно, что интервал значений T_1 ограничен снизу, поскольку в пределе малой амплитуды пульсаций температуры турбулентная коалесценция должна переходить в обычную. Поэтому пульсации температуры должны быть настолько велики, чтобы поток капель в пространстве размеров, вызванный их воздействием, превосходил бы поток, обусловленный зависимостью скорости роста от радиуса. С помощью (20), (23) можно убедиться в том, что все члены в (8) одного порядка. Следовательно, одинаковы порядки величин потоков, связанных с диффузией капель и их упорядоченным движением со скоростью V . Поэто-

му достаточно потребовать, чтобы вызывающая это движение поправка к среднему давлению пара Δn_v была бы много больше поправки к $n_s^*(R, T_0)$ за счет кривизны поверхности капель, равной $n_s^*(R, T_0) - n_s(T_0) \simeq 2n_s(T_0)\sigma/n_l k T_0 R$ [3]. С помощью (24) получим вместо (6) неравенство

$$\bar{R}(3\tau_r/2t)^{1/2} \gg R^*, \quad (25)$$

которое является более жестким условием, чем (6), ввиду наличия малого фактора $(3\tau_r/2t)^{1/2}$. Положив в (25) время t равным характерному времени коалесценции $\tau_D = \bar{R}^2/2D$, запишем (25) в виде

$$\delta^2 \gg 2\sqrt{3}(\tau_i/\tau_r)(\sigma/n_l k T_0 d), \quad (26)$$

где $\delta = q\gamma T_1/T_0^2$. Неравенство (26) также может быть переписано в форме $\tau_D \ll (\sqrt{3}/4)\tau_c$, где $\tau_c = 3\tau_r k T_0 n_l \bar{R}^2 / \sigma d$ — время обычной коалесценции [5]. Поскольку величина $\sigma/n_l k T_0 d$ для многих веществ порядка единицы, а отношение времени конденсации (испарения) монослоя молекул на поверхности капли τ_i к τ_r по смыслу задачи мало, (26) может выполняться и при $\delta \ll 1$. Более жестким может оказаться другое ограничение на δ снизу, связанное с конечностью времени наблюдения τ_H : $\tau_H > \tau_D$. Это условие можно записать в виде

$$\delta > 3\tau_r \bar{R} / d(2\tau_r \tau_H)^{1/2}. \quad (27)$$

Его выполнению также способствует то обстоятельство, что $\tau_i \ll \tau_r \ll \tau_H$.

Рассмотрим ограничения на δ сверху. Одно из них связано с возможностью разложения давления насыщения по малой амплитуде пульсаций температуры: $\delta < 1$. Другое обусловлено требованием малости пульсаций n_v . Как отмечалось в п. 2, для этого необходимо, чтобы время изменения давления пара за счет конденсации — испарения τ_v было достаточно велико. Получим оценку для τ_v . Предположим, что n_v изменяется только за счет испарения и конденсации. Тогда постоянно и число молекул в жидкой фазе в единице объема n_0 . Дифференцируя по времени равенство $n_v + n_0 = \text{const}$ и используя (7), нетрудно получить $\tau_v = |d \ln n_v / dt|^{-1} \simeq (\pi n_0 v \bar{R}^2 \delta)^{-1}$, где \bar{R}^2 — средний квадрат радиуса. Тогда из $\tau_v \gg \tau_0$ следует

$$\delta \ll (\pi n_0 v \bar{R}^2 \tau_0)^{-1}. \quad (28)$$

Время изменения n_v вследствие турбулентной диффузии τ_0 соответствует лагранжеву интегральному временному масштабу пульсаций скорости.

Переходим к оценке τ_r и T_1 . Если капли достаточно велики, то пульсации их скорости много меньше турбулентных пульсаций скорости газа, и $T(t)$ практически совпадает с мгновенным значением температуры в неподвижной точке. В этом случае τ_r является «обычным» характерным временем пульсаций температуры. Если капля мала ($R \ll 1$ мкм при давлении газа $\simeq 1$ атм [9]), ее скорость близка к локальной скорости газа, т. е. она движется вместе с турбулентным вихрем. При этом τ_r порядка времени жизни вихря или времени турбулентной диффузии τ_0 . В реальных условиях временные масштабы пульсаций скорости и температуры должны быть одного порядка [8]. Таким образом, независимо от размера частиц и модели турбулентности $\tau_r \simeq \tau_0$. Из этих же соображений следует, что T_1 порядка амплитуды пульсаций температуры в неподвижной точке.

При выполнении условий (26)–(28) турбулентная коалесценция является более интенсивной, чем обычная. Другим конкурирующим механизмом является коагуляция, также ведущая к повышению дисперсности системы. Скорость коагуляции при постоянной массовой доле капель в потоке резко возрастает при уменьшении их размеров. Однако если частицы несут униполярный заряд, коагуляция сильно подавлена.

В качестве примера рассмотрим двухфазный поток, реализуемый в камере сгорания МГД-генератора, использующего в качестве топлива уголь [10]. Конденсированной фазой здесь являются капли жидкой окиси кремния, которая входит в состав минеральной части угля. При $T_0 =$

$=2600$ К, $T_1=100$ К, $\tau_r=10^{-3}$ с, $n_g=1,41 \cdot 10^{25}$ м $^{-3}$, $n_0=1,10 \cdot 10^{22}$ м $^{-3}$, $n_g=1,72 \cdot 10^{22}$ м $^{-3}$, $q=8,9 \cdot 10^4$ К, $n_1=2,5 \cdot 10^{28}$ м $^{-3}$, $k_{acv}=(3/2)k$, $\bar{R}=10^{-6}$ м получим $D=1,23 \cdot 10^{-11}$ м 2 /с, $\tau_D=4,1 \cdot 10^{-2}$ с. При этом $\tau_D/\tau_c \approx 10^{-3}$. τ_D оказывается порядка времени пребывания капель в камере сгорания, что указывает на существенную роль турбулентной коалесценции в этих условиях.

Автор выражает благодарность Л. М. Биберману за полезные обсуждения результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Диффузионный режим роста. В данном Приложении полученные результаты обобщены на случай малых чисел Кнудсена, когда уравнение роста капли следует записывать в диффузионном приближении. Плотность диффузионного потока вещества на каплю $j=D_0(n_v-n_s)/R$, где D_0 — коэффициент молекулярной диффузии. Поэтому уравнение роста капли имеет вид

$$dR/dt=(D_0/n_1)(n_v-n_s)/R. \quad (\text{П.1})$$

Если не учитывать различие температур газа и капли и считать выполненным условие (6), (П.1) можно свести к

$$d\rho/dt=(v/4n_1)(\Delta n_v-n_s(T_0)qT'/T_0^2), \quad (\text{П.2})$$

где $\rho=(v/8D_0)R^2$, что формально совпадает с (7). Следовательно, коэффициент диффузии в уравнении Фоккера — Планка $\partial f/\partial t=D\partial^2 f/\partial \rho^2-V\partial f/\partial \rho$ определяется соотношением (10).

Отличие от случая, рассмотренного выше в п.2 и 3, заключается в том, что диффузия происходит не в пространстве размеров, а в пространстве площадей. Переходя в интеграле (11) к переменной ρ , получим

$$(128\pi/3)(D_0/v)^2 n_1 \int_0^\infty \rho f(\rho, t) d\rho = n_0, \quad (\text{П.3})$$

т. е. в отличие от (11) сохраняется не третий, а первый момент функции распределения.

Умножая обе части уравнения Фоккера — Планка на ρ и интегрируя по этой переменной с учетом $f(0, t)=0$, можно убедиться, что $V=0$, т. е. уравнение Фоккера — Планка сводится к уравнению диффузии. Его автомодельное решение можно найти способом, аналогичным изложенному в п.3. Записывая $f(\rho, t)=A\beta^2(t)P(\rho\beta(t))$, получим для β уравнение (15а), а для $P(u)$ ($u=\rho\beta$)

$$P''+\lambda uP'+2\lambda P=0. \quad (\text{П.4})$$

Заменой переменных $P=P'(0)\lambda^{-1/2}e^{-x^2/4}\zeta(x)$, $x=\lambda^{1/2}u$ (П.4) сводится к уравнению

$$\zeta''+(3/2-x^2/4)\zeta=0, \quad \zeta(0)=0, \quad \zeta'(0)=1, \quad (\text{П.5})$$

которое совпадает с уравнением Шредингера для волновой функции первого уровня гармонического осциллятора. Его решение

$$\zeta(x)=xe^{-x^2/4}. \quad (\text{П.6})$$

Форму искомой функции распределения дает $Z(x)=e^{-x^2/4}\zeta(x^2)$. Эта функция показана на рис. 2.

Записывая функцию распределения в переменных R, t , получим с учетом (П.3)

$$f(R, t) = \frac{3}{32(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{v}{D_0}\right)^2 \frac{n_0}{n_1} (2Dt)^{-1} u e^{-u^2/2}, \quad (\text{П.7})$$

$$u=(v/D_0)R^2/8(2Dt)^{1/2}.$$

Концентрация капель $n_d=8,67 \cdot 10^{-3}(v/D_0)^{3/2}(n_0/n_1)(2Dt)^{-3/2}$, их средний радиус $\bar{R}=2,75(D_0/v)^{1/2}(2Dt)^{1/4}$. Показатели степенных зависимостей n_d и \bar{R} от времени отличаются от случая обычной коалесценции [1, 2].

Институт высоких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21.I.1988

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифшиц И. М., Слезов В. В. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. № 2. С. 479.
2. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
3. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
4. Шиян А. А., Чесноков М. Н. // ТВТ. 1984. Т. 22. № 1. С. 181.
5. Жуховицкий Д. И., Храпак А. Г., Якубов И. Т. // ТВТ. 1983. Т. 21. № 6. С. 1197.
6. Леонтович М. А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983. 416 с.
7. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. Фукс Н. А. Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
10. Батенин В. М., Григорьянц Р. Р., Максименко В. И. и др. // В кн.: VIII Международная конф. по МГД-преобразованию энергии. М. 12–18 сентября 1983 г. Тез. докл. Т. 1. С. 110.