

УДК 533.92

О РЕЗОНАНСНОМ ПОГЛОЩЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С КОНДЕНСИРОВАННОЙ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗОЙ

Жуховицкий Д. И.

На основе решения кинетического уравнения Больцмана получено выражение для мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости плазмы с частицами конденсированной дисперсной фазы (КДФ) с учетом неоднородности в распределении электронов в электростатическом поле частиц. Показано, что поглощение электромагнитных волн в плазме с КДФ может быть обусловлено явлением резонанса, возникающим в том случае, когда частота движения электронов по замкнутым орбитам, не пересекающим поверхность частиц, близка к частоте электромагнитной волны. Сделана оценка возможности экспериментального наблюдения явления, а также его применения для диагностики плазмы с КДФ.

1. Низкотемпературная плазма с конденсированной дисперсной фазой в настоящее время привлекает значительное внимание (см., например, обзоры [1, 2]). В ряде работ исследовались особенности распространения электромагнитных волн малой амплитуды в плазме с КДФ. Ее комплексная диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\omega)$ необходима, в частности, при разработке методов ее диагностики. При этом обычно предполагается, что средняя кинетическая энергия электронов превышает их среднюю потенциальную энергию в электростатическом поле заряженных частиц, существование которых учитывается как наличие дополнительных рассеивающих центров (см., например, [1, 3, 4]). Такое предположение, как правило, справедливо для большей части электронов. Тем не менее, отличительной особенностью плазмы с КДФ является наличие областей сильной неоднородности в распределении концентрации электронов вблизи частиц [2, 5, 6]. Предположение о том, что эта особенность должна влиять на $\epsilon(\omega)$, высказано в [7]. Этот вопрос и исследуется в данной работе.

2. **Функция распределения резонансных электронов.** Рассмотрим изотермическую плазму — систему частиц КДФ, находящуюся в трудно ионизирующемся газе при температуре порядка 2000–3000 К. В результате термизации электронов с поверхности частиц они приобретают положительный заряд, и возникает система, аналогичная плазме электронов и положительных многозарядных ионов.

Обычно среднее расстояние между частицами значительно превосходит их радиус. Если работа выхода электрона из вещества не слишком велика, а радиус частиц не слишком мал ($R \geq 0,1$ мкм), применима ячеечная модель [5, 6], которую и будем использовать в дальнейшем. Радиус ячейки $\bar{r} = (3/4\pi n_p)^{1/3}$, где n_p — концентрация частиц. Равновесный эффективный заряд частицы определяется соотношением [6]

$$Z = RkT\Phi/e^2.$$

Здесь R — радиус частицы; k — постоянная Больцмана; T — температура; $\Phi = -\ln(2\pi n_p R^3)$ — безразмерный потенциал поверхности частицы. Можно считать, что все электроны, за исключением находящихся вблизи границы ячейки, движутся в кулоновском поле Ze/r^2 [6]. Равновесная концентрация электронов на расстоянии r от центра ячейки

$$n_e(r) = n_{e0} \exp(Ze^2/rkT),$$

где $n_{e0} \approx Zn_p$ — концентрация электронов на границе ячейки, близкая к средней по ячейке концентрации.

Можно выделить три типа электронов в зависимости от их скоростей

и расположения относительно частиц. Поскольку практически всегда $Ze^2/\bar{r}kT \ll 1$ [6], траектории электронов, находящихся на расстояниях $\sim \bar{r}$ от частицы, являются инфинитными. Для разреженной плазмы с КДФ обычно $R^3 n_p \sim 10^{-7} - 10^{-4}$. Следовательно, $\Phi \sim 10$ и электроны, находящиеся на расстояниях $\sim R$ от частицы, оказываются на дне глубоких потенциальных ям. Их траектории финитны, причем электроны второго типа пересекают поверхность частицы (т. е. поглощаются и эмиттируются ею), а электроны третьего типа не пересекают. Будем называть их резонансными электронами.

Частоту обращения резонансных электронов вокруг частиц ω_0 можно оценить, приравняв кулоновскую и центробежную силы $\omega_0 \sim \omega^* = (Ze^2/m_e R^3)^{1/2}$. Если $R = 10^{-4}$ см, то при давлении газа, не превышающем 10 кПа, и сечении рассеяния электронов $\sim 10^{-15}$ см² (электрон-электронные столкновения при $n_e \ll 10^{12}$ см⁻³ несущественны) резонансные электроны между двумя последовательными столкновениями успевают совершить большое число оборотов вокруг частицы. Это дает основания для рассмотрения резонансных явлений.

Нетрудно показать, что время, которое электроны второго типа проводят вне частиц, т. е. обратная частота столкновений, много меньше $1/\omega^*$. Следовательно, они не могут участвовать в резонансных явлениях и в дальнейшем рассматриваться не будут.

Будем искать вклад резонансных электронов $\epsilon_p(\omega)$ в полную диэлектрическую проницаемость плазмы $\epsilon(\omega)$. Для этого необходимо найти плотность тока \mathbf{j} , индуцируемого волной, которая, если пространственная дисперсия несущественна¹, является величиной, усредненной по объему ячейки

$$\mathbf{j} = -e \int \int \mathbf{v} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} d\mathbf{r}, \quad (1)$$

где $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ — функция распределения резонансных электронов. Очевидно, что в силу своего определения резонансные электроны находятся в ограниченной области фазового пространства, которую будем называть резонансной областью. Ее граница определена в Приложении 1. Именно в этой области Ω проводится интегрирование в (1).

Функция распределения является решением кинетического уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \text{St}\{f\}, \quad (2)$$

где в данном случае

$$\mathbf{F} = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3} - \frac{e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right),$$

\mathbf{E} — напряженность электрического поля волны, \mathbf{B} — индукция магнитного поля, $\text{St}\{f\}$ — интеграл столкновений. Для резонансных электронов

$$\text{St}\{f\} = -\nu(v)(f - f_0).$$

Здесь $\nu(v) = \nu n_a q_i(v)$ — частота столкновений электрона с молекулами газа [8]; n_a — концентрация молекул; $q_i(v)$ — транспортное сечение рассеяния электрона на молекулах;

$$f_0(r, v) = n_{e0} n_p \left(\frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_e}{kT} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\alpha}{r} \right) \right] \quad (3)$$

— равновесная функция распределения Максвелла — Больцмана. Рассматривая плоскую монохроматическую волну и считая электрическое поле $\mathbf{E} = \mathbf{e} E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ слабым, будем искать функцию распределения в виде

$$f = f_0 + \delta f, \quad \delta f = f_0 (\chi_1 + i\chi_2) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (4)$$

¹ Для этого длина волны λ должна значительно превышать \bar{r} . Поскольку $\lambda/\bar{r} \approx 2\pi c/\omega \bar{r}$, при $R = 10^{-4}$ см, $Z = 10^8$, $\bar{r} = 2 \cdot 10^{-3}$ см, $\lambda/\bar{r} \approx 200$.

($\chi_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \chi_2(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — вещественные функции). Линеаризуя (2), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \frac{\partial \chi_1}{\partial \mathbf{r}} - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{\partial \chi_1}{\partial \mathbf{v}} - \omega \chi_2 + \nu_0 \chi_1 &= \gamma_0(\mathbf{e}, \mathbf{v}), \\ \mathbf{v} \frac{\partial \chi_2}{\partial \mathbf{r}} - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3} \frac{\partial \chi_2}{\partial \mathbf{v}} + \omega \chi_1 + \nu_0 \chi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

($\gamma_0 = -eE_0/kT$). При записи (5) не учитывалась пространственная дисперсия ($\omega \gg |\mathbf{k}||\mathbf{v}|$), и введена эффективная частота столкновений ν_0 .

Точное решение (5) получено в Приложении 2 (формулы (П.6), (П.7)). Однако вычисление коэффициентов Фурье a_n и b_n в (П.7) в общем случае весьма громоздко. Поэтому ограничимся приближенным результатом в случае, когда частота электромагнитной волны ω близка к ω^*

$$\omega = \omega^*(1 - \delta), \quad \delta \ll 1. \quad (6)$$

Условие (6) означает, что основной вклад в $\epsilon_p(\omega)$ будут давать лишь резонансные электроны, находящиеся вблизи частицы, на расстоянии $r - R \sim R\delta \ll R$ от ее поверхности. При этом r, v_{\perp} и η мало изменяются в резонансной области, и потому можно ограничиться первыми не исчезающими членами в разложении всех величин по малым отношениям r'/r_0 и η'/η_0 ($r' = r - r_0, r_0 = \mu^2/\alpha, \eta' = \dot{r}^2/2 + \omega_0^2 r'^2/2, \omega_0 = \alpha^2/\mu^3, \eta_0 = \alpha^2/2\mu^3$)

$$(\mathbf{e}, \mathbf{v}) \simeq (\alpha/\mu) \sin \theta_1 (\dot{r} \cos \theta_2 + r' \omega_0 \sin \theta_2) / \sqrt{2\eta'}. \quad (7)$$

Выражение (П.4) сводится к $r' = (\sqrt{2\eta'}/\omega_0) \sin \omega_0 \tau, \dot{r} = \sqrt{2\eta'} \cos \omega_0 \tau$, и тогда решение (П.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \gamma_0 (\alpha \omega_0)^{1/2} \sin \theta_1 [r' \omega_0 (K_1 \omega_0 \cos \theta_2 + K_2 \nu_0 \sin \theta_2) + \\ &+ \dot{r} (K_2 \nu_0 \cos \theta_2 - K_1 \omega_0 \sin \theta_2)] / G \sqrt{2\eta'}, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \gamma_0 (\alpha \omega_0)^{1/2} \omega \sin \theta_1 [\omega_0 r' (K_3 \sin \theta_2 - 2\omega_0 \nu_0 \cos \theta_2) + \\ &+ \dot{r} (2\omega_0 \nu_0 \sin \theta_2 + K_3 \cos \theta_2)] / G \sqrt{2\eta'}, \end{aligned} \quad (8b)$$

где $K_1 = \omega_0^2 - \omega^2 + \nu_0^2, K_2 = \omega_0^2 + \omega^2 + \nu_0^2, K_3 = \omega_0^2 - \omega^2 - \nu_0^2$.

В дальнейшем будем рассматривать вклад $\text{Im } \epsilon_p(\omega)$ в мнимую часть полной комплексной диэлектрической проницаемости, который зависит только от действительной части функции распределения, пропорциональной χ_1 . Очевидно, что основной вклад дадут только те электроны, для которых $|\omega_0 - \omega| \ll \nu_0$. Условие резонанса $\omega \gg \nu_0$ дает возможность отбросить в (8a) члены, содержащие K_1 , так как при интегрировании в резонансной области их вклад несуществен. Сравнивая полученное выражение с (7), запишем окончательный результат в виде

$$\chi_1 = \gamma_0(\mathbf{e}, \mathbf{v}) L(\omega_0, \omega), \quad L(\omega_0, \omega) = 2\nu_0 \omega^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \nu_0^2]. \quad (9)$$

3. Мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости. Используем (9) для вычисления $\text{Im } \epsilon_p$. В силу симметрии функции распределения относительно вращений в плоскости $X'OY'$ (см. Приложение 2) от нуля отлична только составляющая тока \mathbf{j} (1), параллельная \mathbf{e}

$$(\mathbf{e}, \mathbf{j}) = -e \int \int_{\Omega} (\mathbf{e}, \mathbf{v}) f dv d\mathbf{r}. \quad (10)$$

Тогда

$$\text{Im } \epsilon_p(\omega) = - (4\pi/\omega E_0) \text{Re}(\mathbf{e}, \mathbf{j}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})}.$$

Подставляя в (10) f , выраженную с помощью (4) через χ_1 и χ_2 , получим

$$\text{Im } \epsilon_p(\omega) = (4\pi e/\omega E_0) \int \int_{\Omega} (\mathbf{e}, \mathbf{v}) f_0 \chi_1 dv d\mathbf{r}. \quad (11)$$

Интегрирование в (11) следует проводить в резонансной области, определяемой условиями (П.1) и (П.3).

Рассмотрим интеграл по скоростям $I(r) = \int (\mathbf{e}, \mathbf{v}) f_0 \chi_1 dv$. Вводя в цилиндрических координатах (см. Приложение 1) переменную $\omega_0 = \alpha^2 / r^3 v_{\perp}^3$ и записывая $(\mathbf{e}, \mathbf{v})^2 \simeq (\alpha \omega_0)^{2/3} \sin^2 \varphi \sin^2 \theta$, где θ — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{e} , получим с использованием (3) и (9)

$$I(r, \theta) = \frac{\pi}{3} n_{e0} n_p \gamma_0 \left(\frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{m_e \alpha}{rkT} \right) \frac{\alpha^2}{r^2} \sin^2 \theta \times \\ \times \int_{\omega_0}^{\omega''} \frac{d\omega_0}{\omega_0} L(\omega_0, \omega) \exp \left(-\frac{m_e \alpha^{1/3}}{2kT r^2 \omega_0^{2/3}} \right) \int_{-\dot{r}_0(\omega_0)}^{\dot{r}_0(\omega_0)} \exp \left(-\frac{m_e \dot{r}^2}{2kT} \right) d\dot{r}. \quad (12)$$

В (12) проведено интегрирование по φ . Частоты ω' и ω'' ($\omega'' > \omega' > 0$) соответствуют максимальному и минимальному (при фиксированном r) значениям v_{\perp} . Величина $\dot{r}_0(\omega_0)$ определяется условием (П.3)

$$\dot{r}_0(\omega_0) = \sqrt{(r^2 - R^2) v_{\perp}^2 / R^2 - 2\alpha(r - R) / rR}; \quad v_{\perp}^2 = \alpha^{1/3} / r^2 \omega_0^{2/3}.$$

Нетрудно показать, что при выполнении условия $(r - R) / R \ll 1$, которое соответствует условию (6), $m_e \dot{r}^2 / 2kT \ll 1$. Это позволяет приближенно записать

$$\int_{-\dot{r}_0(\omega_0)}^{\dot{r}_0(\omega_0)} \exp \left(-\frac{m_e \dot{r}^2}{2kT} \right) d\dot{r} \simeq 2\dot{r}_0(\omega_0).$$

Используя формулу

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{v \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 v^2} = \frac{\pi}{4} \delta(\omega_0 - \omega) + \frac{\pi}{4} \delta(\omega_0 + \omega),$$

проинтегрируем (12) при $v_0 \ll \omega'' - \omega'$,

$$I(r, \theta) = \\ = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} n_{e0} n_p \gamma_0 \frac{\alpha^2}{\omega r^2} \left(\frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[\frac{m_e}{kT} \left(\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha^{1/3}}{2r^2 \omega^{2/3}} \right) \right] \sin^2 \theta \dot{r}_0(\omega), & R \leq r \leq r_c \\ 0, & r > r_c. \end{cases} \quad (13)$$

Параметр обрезания r_c в (13) определяется условием $\omega = \omega''(r_c)$ (при $\omega > \omega''$ интегрирование в (12) проводится на интервале, не содержащем точку $\omega_0 = \omega$). Максимальная частота $\omega'' = \alpha^2 / r_c^3 v_{\perp \text{ мин}}^3$, где $v_{\perp \text{ мин}}$ — минимальное значение v_{\perp} при $r = r_c$. Как следует из (П.3), $v_{\perp \text{ мин}} = \sqrt{2\alpha R / r_c (r_c + R)}$ при $\dot{r} = 0$ и, следовательно, $r_c = (2\omega^{3/2} / \alpha^{1/2} - 1/R)^{-1} \simeq R(1 + 4\delta/3)$.

Взяв первые два члена разложения показателя экспоненты в (13) в точке $r = \alpha^{1/2} / \omega^{2/3}$ и представив в линеаризованном виде $\dot{r}_0(\omega) \simeq \sqrt{(\alpha/R)(4\delta\xi/3 - \xi^2)}$ ($\xi = r/R - 1$), запишем (11) в виде

$$\text{Im } \epsilon_p(\delta) = -\frac{(2\pi)^{3/2}}{9} R^3 n_p \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \Phi^{3/2} \exp \left[\frac{\Phi}{2} (1 - \delta)^{3/2} \right] \times \\ \times \int_0^{4\delta/3} \exp \left[-\frac{m_e \omega^2 R^2}{2kT} \left(1 - \frac{\alpha^{1/2}}{\omega^{2/3} R} + \xi \right)^2 \right] \sqrt{\frac{4\delta\xi}{3} - \xi^2} d\xi, \quad (14)$$

где проведено интегрирование по θ , $\omega_{p0}^2 = 4\pi n_{e0} e^2 / m_e$. Экспонента, стоящая под знаком интеграла в (14), существенно отличается от единицы при

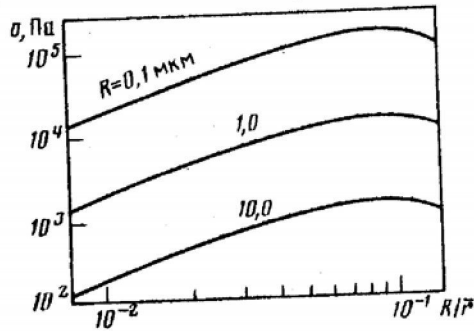


Рис. 1

Рис. 1. Максимальное давление газа, при котором возможно наблюдение резонансного поглощения (транспортное сечение рассеяния электронов $q_t = 7,8 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$)

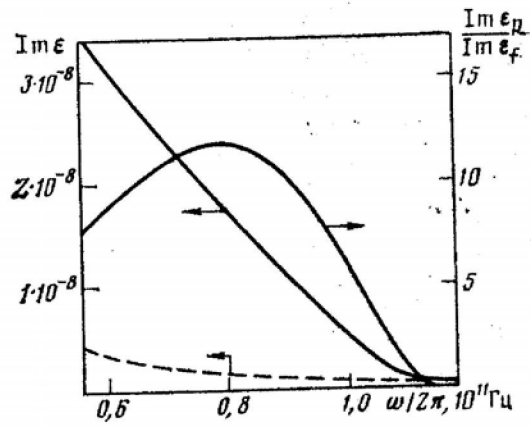


Рис. 2

Рис. 2. $\text{Im } \epsilon$ и $\text{Im } \epsilon_p / \text{Im } \epsilon_f$ как функции частоты ω (штриховая кривая — $\text{Im } \epsilon$ без учета резонансного поглощения) при $R = 10^{-4} \text{ см}$, $n_p = 2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$, $\Phi = 13,587$

$\xi \gg 2/\Phi^{1/2} \sim 1$, если $\Phi \sim 10$. Тогда интеграл (14) вычисляется аналитически и окончательно получаем

$$\text{Im } \epsilon_p(\delta) = -\frac{(2\pi)^{3/2}}{81} R^3 n_p \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} \Phi^{3/2} \frac{\delta^2}{(1-\delta)^2} \exp\left[\frac{\Phi}{2} (1-\delta)^{3/2}\right]. \quad (15)$$

4. Результаты расчетов. Обсуждение. Формула (15) определяет вклад резонансных электронов в $\text{Im } \epsilon(\omega)$. Обычным механизмом поглощения электромагнитных волн в плазме с КДФ являются столкновения свободных электронов с молекулами газа и частицами; соответствующий вклад $\text{Im } \epsilon_f = -(\nu_p + \nu) \omega_{p0}^2 / \omega^3$, где $\nu = (m_e n_a / 3kT) \langle v^3 q_t(v) \rangle$, ν_p — частота столкновений с частицами. Относительный вклад резонансного поглощения велик при низких давлениях газа и уменьшается при высоких давлениях ($\nu \gg \nu_p$). Максимальное давление газа p , при котором возможно наблюдение рассматриваемого эффекта, можно определить из соотношения $\text{Im } \epsilon_p = -\text{Im } \epsilon_f$. На рис. 1 представлены результаты расчета p для различных радиусов частиц и отношений R/\bar{r} . Расчеты проводились для воздуха и для таких значений δ , при которых отношение $\text{Im } \epsilon_p / \text{Im } \epsilon_f$ максимально. Из рис. 1 следует, что область, в которой существенно резонансное поглощение, находится для частиц различных радиусов ниже соответствующих кривых.

Если давление газа мало ($\nu \ll \nu_p$), резонансное поглощение должно проявляться особенно отчетливо. Величина ν_p определяется выражением [1]

$$\nu_p = \frac{4\pi}{9} n_p \frac{Z^2 e^4}{k^2 T^2} \left(\frac{3kT}{m_e}\right)^{1/2} \Lambda + \pi R^3 n_p \left(\frac{8kT}{\pi m_e}\right)^{1/2} (1+\Phi),$$

$$\Lambda = \ln[\sin(\psi_1/2)/\sin(\psi_2/2)], \quad \text{ctg}(\psi_1/2) = (3/\Phi)(1+2\Phi/3)^{1/2},$$

$$\text{ctg}(\psi_2/2) = 3r_D/R\Phi.$$

Радиус экранировки поля частицы r_D в ячеечной модели естественно определить как расстояние, на котором потенциал $\phi(r)$ ослабляется в e раз по сравнению с Ze/r . Беря выражение для $\phi(r)$ из [5], получим $r_D \approx 0,452\bar{r}$. На рис. 2 показаны частотные зависимости $\text{Im } \epsilon(\omega) = \text{Im } \epsilon_p + \text{Im } \epsilon_f$ и $\text{Im } \epsilon_p / \text{Im } \epsilon_f$ (при $p \leq 100 \text{ Па}$ и $q_t \leq 10^{-16} \text{ см}^2$, $\nu \ll \nu_p$). Анализ допущений, сделанных при вычислении интегралов в п. 3, показывает, что точность (15) является удовлетворительной при $\delta \leq 0,5$, т. е. во всем интервале частот, показанном на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что $\text{Im } \epsilon_p$ может на порядок величины превосходить $\text{Im } \epsilon_f$, причем резонансное поглощение существенно в интервале частот

от $\omega \approx \omega^*/2$ до $\omega = \omega^*$. При $\omega > \omega^*$ оно отсутствует, поскольку ω^* является максимальной частотой орбитального вращения электронов. Отмеченная особенность, по-видимому, может быть использована для диагностики плазмы с КДФ путем измерения ω^* .

Кривая поглощения на рис. 2 не содержит резонансного пика, характерного, например, для циклотронного резонанса. Это объясняется тем, что собственные частоты различных электронов ω_0 находятся в широком интервале частот $\Delta\omega_0 \sim \omega^*$, а резонансное поглощение при $\nu_0 \ll \omega^*$ определяется только той частью электронов, для которой выполняется условие резонанса $|\omega - \omega_0| < \nu_0$.

Изложенная теория не учитывает искажения поля волны вблизи поверхности частиц и потому применима только для диэлектрических частиц. Вблизи поверхности металлических частиц поле волны экранируется [9]. Однако поскольку экранировка происходит в тонком слое $\approx 0,25R$, картина явления качественно не изменяется. Кроме того, поглощение в веществе металлических частиц дает вклад в $\text{Im } \epsilon(\omega)$ порядка $-n_p R^3 \omega / \sigma$ (σ — электропроводность). При $\omega \sim \omega^* \sim \sigma$ этот вклад может быть значительным.

Эффект резонансного поглощения, по-видимому, можно наблюдать в том случае, если радиусы частиц не слишком малы и не слишком велики ($0,1 \text{ мкм} < R < 10 \text{ мкм}$). При $R < 0,1 \text{ мкм}$ потенциал Φ снижается [6] и исчезает неоднородность в распределении электронов. При $R > 10 \text{ мкм}$ становится очень малым показатель поглощения волны $\kappa_\omega = -\omega^*(1 - \delta) \text{Im } \epsilon_p / c$. Так, при $R = 10^{-3} \text{ см}$, $R/\bar{r} = 0,1$ $\kappa_\omega^{-1} \approx 10 \text{ м}$.

В данной работе рассматривалась монодисперсная система частиц КДФ. Если она является полидисперсной, то при вычислении тока необходимо проводить усреднение по размерам частиц. В силу отмеченного выше большого «разброса» собственных частот электронов резонансное поглощение может быть существенным и в полидисперсной системе, если ширина функции распределения по размерам не превосходит по порядку величины R .

Автор выражает благодарность И. Т. Якубову за поддержку и внимание к работе.

Приложение 1

Резонансная область. Определим область в фазовом пространстве, в которой находятся резонансные электроны (резонансную область). Пренебрегая столкновениями, рассмотрим движение электронов в кулоновском поле частицы. Первое условие, определяющее резонансную область, есть условие финитности траектории, т. е. отрицательности полной энергии электронов. В цилиндрической системе координат, ось z которой направлена вдоль радиус-вектора электрона r , условие финитности имеет вид

$$v_\perp^2 + \dot{r}^2 - \rho^2 \leq 0, \quad (\text{П.1})$$

где $\dot{r} = (\mathbf{r}, \mathbf{v})/r$ — z -координата скорости электрона \mathbf{v} (продольная скорость); $v_\perp = \sqrt{v^2 - \dot{r}^2}$ — поперечная скорость; $\rho^2 = 2\alpha/r$; $\alpha = Ze^2/m_e$. Резонансная область, следовательно, должна находиться внутри круга радиуса ρ в плоскости \dot{r} , v_\perp (рис. 3).

Второе условие есть требование того, чтобы траектория электрона не пересекала поверхность частицы. Для получения этого условия сначала найдем связь между \dot{r} и v_\perp в том случае, когда задано минимальное расстояние R_0 , на которое электрон приближается к частице при движении по орбите. Записывая законы сохранения энергии и момента импульса

$$v_\perp^2 / 2 + \dot{r}^2 / 2 - \alpha / r = v_0^2 / 2 - \alpha / R_0; \quad v_\perp r = v_0 R_0,$$

где v_0 — скорость электрона на расстоянии R_0 , получим

$$v_\perp^2 / a_0^2 - \dot{r}^2 / b_0^2 = 1. \quad (\text{П.2})$$

Здесь $a_0^2 = 2\alpha R_0 / r(r + R_0)$, $b_0^2 = 2\alpha(r - R_0) / rR_0$.

Уравнение (П.2) определяет гиперболу в плоскости \dot{r} , v_\perp (рис. 3). Резонансная область должна содержать только такие точки, в которых $R_0 \geq R$. При $R_0 = R$ минимален угол наклона асимптот гиперболы φ_0 , $\text{tg } \varphi_0 = a_0 / b_0 = R_0 / (r^2 - R_0^2)^{1/2}$, а также параметр a_0 . При возрастании R_0 от R до r φ_0 и a_0 увеличиваются. Поэтому в резонансной области

$$v_\perp^2 / a^2 \geq 1 + \dot{r}^2 / b^2; \quad a^2 = 2\alpha R / r(r + R), \quad b^2 = 2\alpha(r - R) / rR. \quad (\text{П.3})$$

Объединяя условия (П.1) и (П.3), получим область, заштрихованную на рис. 3.

Ее вид в плоскости \dot{r} , v_{\perp} определяется расстоянием \dot{r} . При $r \rightarrow R$ резонансная область вырождается в отрезок, заключенный между $v_{\perp} = (\alpha/R)^{1/2}$ и $v_{\perp} = (2\alpha/R)^{1/2}$. Из этого следует, что вблизи поверхности частицы резонансные электроны имеют скорости, составляющие угол, близкий к $\pi/2$ с нормалью к поверхности частицы, а их кинетическая энергия не может быть меньше $m_e v_{\perp}^2 / 2 \approx m_e \alpha / 2R = T\Phi / 2 \gg T$, поскольку $\Phi \gg 1$. Таким образом, условия (П.1) и (П.3) накладывают довольно жесткие ограничения на скорости резонансных электронов.

Приложение 2

Общее решение линеаризованного кинетического уравнения. Система уравнений (5) может быть решена точно при выборе подходящей замены переменных. Заметим, что χ_1 и χ_2 являются функциями векторов \mathbf{r} и \mathbf{v} , т. е. шести переменных, из которых в силу симметрии решения (5) относительно вращений вокруг вектора \mathbf{e} только пять независимы. Поэтому в качестве пяти новых независимых переменных

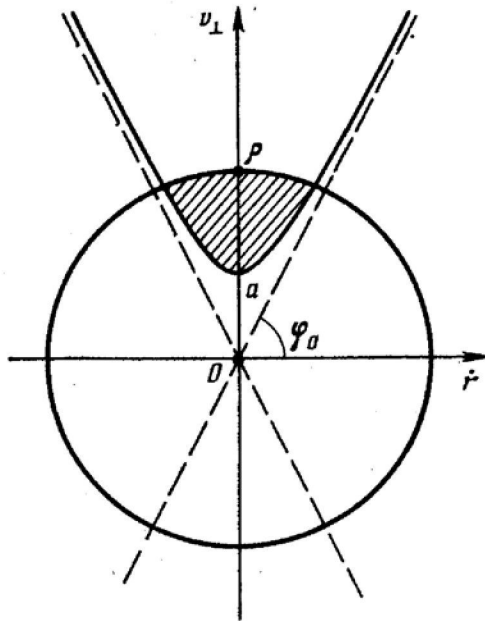


Рис. 3

Рис. 3. Резонансная область в цилиндрических координатах

Рис. 4. Расположение векторов в плоскости X'OY'

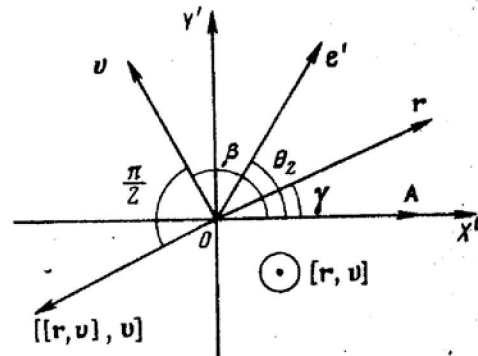


Рис. 4

ных можно выбрать величины $r = |\mathbf{r}|$; $\eta = v^2 / 2 - \alpha / r$; $\mu = |[\mathbf{r}, \mathbf{v}]|$; θ_1 — угол между векторами $[\mathbf{r}, \mathbf{v}]$ и \mathbf{e} ; θ_2 — угол между проекцией \mathbf{e} на плоскость, перпендикулярную $[\mathbf{r}, \mathbf{v}]$, и вектором Рунге — Ленца $\mathbf{A} = \mathbf{r} / r + [[\mathbf{r}, \mathbf{v}], \mathbf{v}] / \alpha$. Величины η , μ , θ_1 и θ_2 могут быть выражены через полную энергию электрона, а также через компоненты векторов момента импульса и вектора \mathbf{A} , которые сохраняются при движении в кулоновском поле. Поэтому в уравнениях (5) должна присутствовать только производная по r , а члены с производными по η , μ , θ_1 и θ_2 взаимно уничтожаются. Произведи замену переменных и учитывая, что $\dot{r}^2 = 2\eta - \mu^2 / r^2 + 2\alpha / r$, запишем

$$v \frac{\partial \chi_{1,2}}{\partial r} - \alpha \frac{r}{r^3} \frac{\partial \chi_{1,2}}{\partial v} = \frac{d\chi_{1,2}}{dr} \sqrt{2\eta - \frac{\mu^2}{r^2} + 2\frac{\alpha}{r}},$$

где χ_1 и χ_2 зависят от η , μ , θ_1 и θ_2 лишь параметрически.

Для решения (5) необходимо записать в новых переменных (\mathbf{e} , \mathbf{v}). Поскольку вектор $[\mathbf{r}, \mathbf{v}]$ перпендикулярен вектору \mathbf{A} , можно выбрать такую систему координат $X'Y'Z'$, в которой вектор $[\mathbf{r}, \mathbf{v}]$ направлен вдоль оси Z' , а вектор \mathbf{A} — вдоль оси X' (рис. 4). Обозначим углы между \mathbf{v} и \mathbf{A} через β , а между \mathbf{r} и \mathbf{A} — через γ , \mathbf{e}' — составляющая вектора \mathbf{e} в плоскости $X'OY'$. Очевидно, что $(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = (\mathbf{e}', \mathbf{v}) \sin \theta_1 = -\sin \theta_1 (g_1 \cos \theta_2 + g_2 \sin \theta_2)$, где $g_1 = \cos \beta$, $g_2 = \sin \beta$. Далее воспользуемся тем, что в выбранной системе координат вектор \mathbf{A} имеет компоненты $\mathbf{A} = \{A, 0\}$. С другой стороны, по определению

$$\mathbf{A} = \{\cos \gamma - (\mu v / \alpha) \sin \beta, \sin \gamma + (\mu v / \alpha) \cos \beta\}.$$

Учитывая, что $\dot{r} = (\mathbf{r}, \mathbf{v}) = rv \cos(\beta - \gamma)$, получаем систему двух алгебраических уравнений относительно g_1 и g_2 , решение которой имеет вид

$$g_1 = \dot{r} / v \sqrt{1 + 2\mu^2 \eta / \alpha^2}, \quad g_2 = \mu (1 / rv - v / \alpha) \sqrt{1 + 2\mu^2 \eta / \alpha^2},$$

$$v^2 = 2(\eta + \alpha / r).$$

Введем вместо r новую переменную

$$\tau(r) = \frac{r\sqrt{2\eta - \mu^2/r^2 + 2\alpha/r}}{2\eta} - \frac{\alpha}{(-2\eta)^{1/2}} \arcsin \frac{2\eta r + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2\mu^2\eta}}. \quad (\text{П.4})$$

Тогда (5) можно записать в виде

$$d\chi_1/d\tau - \omega\chi_2 + \nu_0\chi_1 = \gamma_0(e, \nu), \quad d\chi_2/d\tau + \omega\chi_1 + \nu_0\chi_2 = 0. \quad (\text{П.5})$$

Поскольку правая часть периодична по τ с периодом $2\pi/\omega_0$ ($\omega_0 = (-2\eta)^{1/2}/\alpha$), решение, обращающееся в нуль при $\gamma_0=0$, можно искать в виде ряда Фурье

$$\chi_{1,2} = \frac{C_0^{(1,2)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(1,2)} \cos n\omega_0\tau + C_n^{(2,1)} \sin n\omega_0\tau). \quad (\text{П.6})$$

Подставляя (П.6) в (П.5) и приравнявая коэффициенты при соответствующих членах разложения Фурье в левой и правой частях, получим

$$\begin{aligned} C_n^{(1)} &= G^{-1} [a_n \nu_0 (\nu_0^2 + \omega^2 + n^2 \omega_0^2) + b_n n \omega_0 (\omega^2 - n^2 \omega_0^2 - \nu_0^2)], \\ C_n^{(2)} &= G^{-1} [b_n \nu_0 (\nu_0^2 + n^2 \omega_0^2 + \omega^2) + a_n n \omega_0 (\nu_0^2 + n^2 \omega_0^2 - \omega^2)], \\ C_n^{(3)} &= G^{-1} [a_n \omega (n^2 \omega_0^2 - \omega^2 - \nu_0^2) + 2b_n n \omega_0 \omega \nu_0], \\ C_n^{(4)} &= G^{-1} [b_n \omega (n^2 \omega_0^2 - \omega^2 - \nu_0^2) - 2a_n n \omega_0 \omega \nu_0], \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

$$G = (\omega^2 - n^2 \omega_0^2)^2 + 2(n^2 \omega_0^2 + \omega^2) \nu_0^2 + \nu_0^4,$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{\omega_0}{\pi} \gamma_0 \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} (e, \nu) \begin{pmatrix} \cos n\omega_0\tau \\ \sin n\omega_0\tau \end{pmatrix} d\tau.$$

Институт высоких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10.1.1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Sodha M. S., Guha S. Adv. Plasma Phys., 1971, v. 4, p. 219.
2. Жуковичкий Д. И., Храпак А. Г., Якубов И. Т. В сб.: Химия плазмы. Вып. 11/Под ред. Смирнова В. М. М.: Энергоиздат, 1984, с. 130.
3. Горбатов А. В., Самуйлов Е. В. ТВТ, 1979, т. 17, № 5, с. 1098.
4. Горбатов А. В., Самуйлов Е. В. ТВТ, 1983, т. 21, № 1, с. 17.
5. Gibson E. G. Phys. Fluids, 1966, v. 9, № 12, p. 2389.
6. Жуковичкий Д. И., Храпак А. Г., Якубов И. Т. ТВТ, 1984, т. 22, № 5, с. 833.
7. Зимин Э. П. В сб.: Вопросы газотермодинамики энергоустановок. Вып. 1/Под ред. Борисенко А. И. Харьков: ХАИ, 1974, с. 8.
8. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.